יש לרשום בעמודים הבאים פתרון מלא ומנומק לשתי השאלות הבאות.

1. (25 נקודות)
נתון השדה הוקטורי
$$\overline{F}(x,y,z) = xz\hat{j} - 2xy\hat{k}$$
והמשטח
$$S = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2=4,\ \ z \geq \sqrt{3}\}$$
עם אוריינטציה עבורה לנורמל רכיב z חיובי.
חשבו את
$$\iint\limits_S (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dS$$
בשתי דרכים:

(א) (13 נקודות)
בעזרת משפט סטוקס.

(ב) (12 נקודות)
בעזרת משפט גאוס.

פתרון:

(א) השדה שלנו גזיר ברציפות בכל סדר שכן הרכיבים שלו הם פולינומים.
השפה של המשטח הוא העקום
$$\partial S = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2=4,\ \ z=\sqrt{3}\} = \{(x,y,\sqrt{3})|\ x^2+y^2=1\}$$
וכאשר נותנים לשפה של S את האוריינטציה שהיא נגד כיוון השעון כאשר מסתכלים מלמעלה, אז האוריינטציה של המשטח S והאוריינטציה של השפה תואמות, ולכן, לפי סטוקס
$$\oint\limits_{\partial S} \overline{F} \cdot \overline{r} = \iint\limits_S (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dS.$$
הפרמטריזציה
$$\overline{r}(t) = \big(\cos t, \sin t, \sqrt{3}\big), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
היא פרמטריזציה של השפה של S התואמת את האוריינטציה, ולכן
$$\iint\limits_S (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dS = \oint\limits_{\partial S} \overline{F} \cdot \overline{r} =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \big(0, \sqrt{3}\cos t, -2\cos t \sin t\big) \cdot \big(-\sin t, \cos t, 0\big) dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{3}\cos^2 t dt = \sqrt{3}\pi$$

(ב) נסתכל על המשטח

$$S_1 = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2 \le 1,\ \ z=\sqrt{3}\}$$

עם האוריינטציה שהיא כלפי מטה, כלומר בעלת נורמל שיש לו רכיב z שלילי. אז $S \cup S_1$ הוא השפה של הגוף

$$V = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2 \le 1,\ \ \sqrt{3} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}\}$$

והאוריינטציה על $S \cup S_1$ היא האוריינטציה החיובית כשפה של V. לכן, כיוון שהשפה של V היא חלקה למקוטעין ומכיוון שהשדה הווקטורי הוא C^2, אז $\overline{\nabla} \times \overline{F} \in C^1$, ואז אנו יכולים להשתמש בגאוס ולקבל

$$\iint\limits_{S \cup S_1} (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dS = \iiint\limits_{V} \overline{\nabla} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{F}) dxdydz = \iiint\limits_{V} 0 dxdydz = 0$$

כאשר $\overline{\nabla} \cdot (\overline{\nabla} \times \overline{F}) = 0$ כי השדה גזיר פעמיים ברציפות.
מצד שני

$$0 = \iint\limits_{S \cup S_1} (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dS = \iint\limits_{S} (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dS + \iint\limits_{S_1} (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dS.$$

נחשב את

$$\iint\limits_{S_1} (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dS.$$

$$\overline{r}(x,y) = (x,y,\sqrt{3}), \quad x^2+y^2 \le 1$$

היא פרמטריזציה של S_1 עבורה

$$\overline{r}'_x(x,y) \times \overline{r}'_y(x,y) = (0,0,1)$$

שאינה תואמת את האוריינטציה של S_1. בנוסף $\overline{\nabla} \times \overline{F} = \big(-3x, 2y, z\big)$.

$$\iint\limits_{S_1} (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dS = -\iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} \big(-3x, 2y, \sqrt{3}\big) \cdot (0,0,1) dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} \sqrt{3} dxdy = -\sqrt{3}\pi$$

ולכן

$$\iint\limits_{S} (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dS = -\iint\limits_{S_1} (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dS = \sqrt{3}\pi$$

2. (25 נקודות)
נתונה הפונקציה

$$f(x,y) = 2xy - x - y$$

והתחום

$$D = \{(x,y)|\ x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge -x\}.$$

(א) (8 נקודות)
האם לפונקציה יש מקסימום (מוחלט) במישור? האם לפונקציה יש מינימום (מוחלט) במישור?

(ב) (17 נקודות)
הוכיחו כי לפונקציה הנתונה יש מינימום ומקסימום (מוחלטים) בתחום D ומיצאו אותם ואת הנקודות בהן הן מתקבלות.

פתרון:

(א) כיוון ש־

$$f(t,t) = 2t^2 - 2t$$

היא פרבולה מחייכת שאין לה מקסימום, אז לפונקציה $f(x,y)$ אין מקסימום במישור.
כיוון ש־

$$f(t,-t) = -2t^2$$

שהיא פרבולה עצובה, אז אין לה מינימום, ולכן ל־ $f(x,y)$ אין מינימום במישור.

(ב) כיוון ש־D תחום חסום וסגור, וכיוון ש־ $f(x,y)$ רציפה מכיוון שהיא פולינום, אז לפי משפט ווירשטראס, יש לה מינימום ומקסימום ב־D.
נחפש נקודת קיצון מקומי פנימית:

$$f'_x(x,y) = 2y - 1 = 0$$
$$f'_y(x,y) = 2x - 1 = 0$$

ונקבל את הנקודה $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, שהיא נקודה בפנים התחום D מכיוון ש־

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1, \quad \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}.$$

לכן היא ברשימת הנקודות החשודות.
נחפש כעת נקודת קיצון מקומי על השפה של התחום D: החיתוך בין $x^2 + y^2 = 1, y = -x$ נותן את הנקודות $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. גם אלו נקודות חשודות.
נחפש על החלק של $y = -x$:

$$f(x,-x) = -2x^2,\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

שיש לה קיצון מקומי ב־ $x = 0$, שנותן את הנקודה $(0,0)$ שהיא חשודה. נקודות הקצה של הקטע נותנות נקודות שכבר רשמנו.
נחפש נקודות חשודות על החלק של $x^2 + y^2 = 1$: כיוון ש־
$f(x,y), g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \in C^1$ כי הן פולינומים, וכיוון ש־

$$\overline{\nabla} g(x,y) = (2x, 2y)$$

שאינו מתאפס על האילוץ $0 = g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, אז אנו יכולים להשתמש בלגרנג' ולקבל

$$\begin{aligned}
&2y - 1 + 2x\lambda = 0 \iff 2\lambda x + 2y = 1\\
&2x - 1 + 2y\lambda = 0 \iff 2x + 2\lambda y = 1\\
&x^2 + y^2 = 1
\end{aligned}$$

הדטרמיננט של המערכת הלינארית מימין הוא

$$4\lambda^2 - 4 = 4(\lambda^2 - 1)$$

והוא מתאפס בשני מקרים:
מקרה שבו $\lambda = 1$ ואז המערכת היא

$$\begin{aligned}
2x + 2y = 1\\
2x + 2y = 1
\end{aligned}$$

שנותן $y = \frac{1}{2} - x$, ואז הצבה לאילוץ נותנת

$$x^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = 1 \implies \left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}, \frac{1-\sqrt{7}}{4}\right), \left(\frac{1-\sqrt{7}}{4}, \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$$

ושתי נקודות אלו מקיימות $y \geq -x$ ולכן הן חשודות.
מקרה שבו $\lambda = -1$ ואז המערכת היא

$$\begin{aligned}
-2x + 2y = 1\\
2x - 2y = 1
\end{aligned}$$

ולמערכת זו אין פתרון.
לבסוף, אם $\lambda \neq \pm 1$ אז המערכת

$$\begin{aligned}
2\lambda x + 2y = 1\\
2x + 2\lambda y = 1
\end{aligned}$$

הפיכה ויש לה פתרון יחיד. נחסר את המשוואות ונקבל

$$(2\lambda-2)x+(2-2\lambda)y = 0 \iff (\lambda-1)x-(\lambda-1)y = 0 \implies x = y \implies x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

שנותן את $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, אבל רק $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ נמצא ב־D. ולכן $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ חשודה גם היא. לבסוף נציב את כל הנקודות

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\\
&f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1\\
&f(0,0) = 0 \quad max\\
&f\left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}, \frac{1-\sqrt{7}}{4}\right) = f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{4}, \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{5}{4} \quad min\\
&f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}
\end{aligned}$$